数理解析研究所講究録
367巻 1979年 134-152

小さな乱雑摂動をうけた力学系のOnsager-Machlup理論

気象庁　地磁気観測所　伊藤秀美

§1 物理的背景及びモデル

物理でよく使われるモデルから説きおこそう。考える物理系がjump型のMarkov過程で記述できるとし，かつ空間的に一様だという仮定をおくと，transition density $P_\varepsilon(t,x,y)$ は次の発展方程式（物理でMaster方程式と呼んでいる）に従う[1].

$$\frac{\partial}{\partial t}P_\varepsilon(t,x,y)=\frac{1}{\varepsilon}\int dr\left\{w(y-\varepsilon r,r)P_\varepsilon(t,x,y-\varepsilon r)-w(y,r)P_\varepsilon(t,x,y)\right\} \tag{1.1}$$

ここで w は既知函数で，$1/\varepsilon$ は系の体積である．熱力学的極限（$\varepsilon\to 0$）をとると，非平衡熱力学の分野[2]と交渉をもつと期待される。次に掲げるa)～c)は非平衡熱力学の中心課題であり[3]、我々も同じ問題意識をもってモデル(1.1)（を少し一般化したもの）の $\varepsilon\to 0$ の極限を調べることにする。

a) 過程の進行の問題

b) 行きつくべき状態の決定

c) 安定性の問題

a)～c)をここでの問題に適切な形に書き直すと次のようになろう。

a)′ 有限時間内の時間発展

b)′ 十分時間がたった時，定常状態におちつくと考えられるが定常分布（不変測度）の $\varepsilon \to 0$ での振舞

c)′ 最初ある領域内にいた時，時間がたつと他の領域へ移って（緩和して）ゆくか，その緩和の方向，時間．

このような問題について1次元系ではいくつかの個別的アプローチがある[4]。この場合はポテンシャルが存在して，結論はこのポテンシャルを使って述べられる。我々は2次元以上のポテンシャルの存在しない一般の場合も含めて調べたい。以下の話の物理的に最も重要な点は，一言でいえば，「一般の場合にポテンシャルの役目を果たすのがOnsager-Machlupの函数である。」となる。物理的なまとめを§11にしておいたので細部に興味のない方はそこを見られたい。

モデル(1.1)は，このままでは余り明らかでないが，力学系に小さなjump型摂動を加えたものになっている。そこで以下ではこれをもう少し一般化したものについて議論しよう。

d次元Euclid空間で力学系

$$\dot{x}_t = b(x_t) \quad , \quad x_0 = x \tag{1.2}$$

が与えられたとし，これに小さな乱雑摂動をつけ加えた，

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)dw_{\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon\int c(X_t^\varepsilon, u)\,\tilde{\nu}(\frac{dt}{\varepsilon}, du) \\ X_0^\varepsilon = x\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

なる確率微分方程式で記述されるモデルを考察する。ここで b, c は $R^d \to R^d$, σ は $R^d \to R^d \times R^d$, $\tilde{\nu}$ は Poisson random measure ν からその平均を引いたものである($\tilde{\nu}([0,t), A) = \nu([0,t), A) - t\Pi(A)$ $E_x[\nu([0,t), A] = t\Pi(A)$, $\Pi(du) = du/|u|^{d+1}$ [5] 参照)。 w_t は d次元 Wiener過程. w と ν は互いに独立.

モデル(1.1)は(1.3)で

$$\begin{cases} \sigma \equiv 0 \\ b(x) = \int c(x,u)\,\Pi(du) \\ w(x,r)dr = \int_{c(x,u)\in dr} \Pi(du) \end{cases} \tag{1.4}$$

とおけば得られる.

方程式(1.3)にいわゆる Lipschitz 条件を仮定しよう.

条件 L: ある定数 C, C_N が存在して,

(L-1) $|b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 + \int |c(x,u)|^2\,\Pi(du) \le C(1+|x|^2)$

(L-2) $|b(x) - b(y)|^2 + |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 + \int |c(x,u) - c(y,u)|^2\,\Pi(du)$

$$\le C_N |x-y|^2, \qquad x, y \in N.$$

ここで N は原点中心半径 N の球, $|\ |$ は通常の Euclid norm (但し $|\sigma(\cdot)|^2 = \sum_{i,j} |\sigma_{ij}(\cdot)|^2$ etc.)

Lipschitz 条件 L の下で, 時刻 t について右連続な増大する σ

代数の列$\mathcal{F}_t$がとれ，$\mathcal{F}_t$について強マルコフな過程X^εが$\sup_{0\le t\le T} E_x |\cdot|^2] < \infty$に一意的に存在する。又$X^\varepsilon$は右連続にとれる[5].

確率微分方程式(1.3)の生成作用素A_εはfが2階までの連続で有界な微係数をもつ函数のとき

$$A_\varepsilon f(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{E_x[f(X_t)] - f(x)}{t}$$

$$= (b(x), \nabla f(x)) + \frac{\varepsilon}{2} tr(a(x)\nabla\nabla f(x)) \tag{1.5}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int \{f(x+u) - f(x) - (\nabla f(x), u)\} \mu_x\left(\frac{du}{\varepsilon}\right)$$

ここで

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x)$$

$$\mu_x(A) = \int_{c(x,u)\in A} \Pi(du) \tag{1.6}$$

§2. 有限時間内の時間発展

Lipschitz 条件 L-2)のC_Nが N によらない場合（一様Lipschitz）に次のことが成立.

定理 1 ;

$$X_t^\varepsilon \to \varphi_t \quad (\text{弱収束})$$

φ_tは

$$\dot{\varphi}_t = b(\varphi_t), \quad \varphi_0 = x$$

の解．さらにbが$C^2(R^d)$に属し，

$$\int |c(x;u)|^3 \Pi(du) < \infty, \quad \forall x \in R^d$$

ならば

$$\xi_t^\varepsilon = (X_t^\varepsilon - \varphi_t)/\sqrt{\varepsilon}$$

は

$$d\xi_t = \tilde{b}(\varphi_t)\xi_t\,dt + \tilde{\sigma}(\varphi_t)\,dw_t\ ,\quad \xi_0 = 0$$

を満たす Gauss 過程 ξ_t に弱収束する．ここで

$$\begin{cases} \tilde{b}_{ij}(x) = \dfrac{\partial b_i(x)}{\partial x_j} \\ \sum_k \tilde{\sigma}_{ik}(x)\tilde{\sigma}_{jk}(x) = \sum_k \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x) + \int c_i(x;u)\,c_j(x;u)\,\Pi(du). \end{cases}$$

この結果は実際上よく使われる[1]．ここでは確率微分方程式の解の漸近的振舞に関する一般論（[5] p338 Th3 & p273）を用いて証明した，他にも semigroup を使うやり方[6]とか，もっと直接的に transition density の極限を調べるやり方[7]等がある．

§3 Onsager－Machlup 汎函数 $S_T(\varphi)$

次の量を導入する：

$$\begin{aligned} H^\varepsilon(x;z) &= \lim_{t\downarrow 0} E_x[\exp(z, X_t^\varepsilon - x) - 1]/t \\ &= (b(x), z) + \frac{\varepsilon}{2}(z, a(x)z) + \frac{1}{\varepsilon}\int \{e^{(z,u)} - 1 - (z,u)\}\,\mu_x\left(\frac{du}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで E_x は $X_0^\varepsilon = x$ という条件の下に期待値をとることを意味する．(3.1)の収束は各 $z \in R^d$ に対して x について compact 集合上で一様とする。以下では $\varepsilon=1$ に対応する量は肩の ε をおとして表わすことにする。例えば $X_t = X_t^{\varepsilon=1}$，$H(x;z) = H^{\varepsilon=1}(x;z)$．

こうすると，

$$H^{\varepsilon}(x;z) = \frac{1}{\varepsilon} H(x;\varepsilon z).$$

$H(x;\cdot)$ の Legendre 変換を $L(x;\cdot)$ とする：

$$L(x;u) = \sup_{z\in R^d}\{(z,u) - H(x;z)\} \quad \left(L^{\varepsilon}(x;u) = \frac{1}{\varepsilon} L(x;u) \right) \tag{3.2}$$

Onsager-Machlup 汎函数 $S_T(\varphi)$ を

$$S_T(\varphi) = \begin{cases} \int_0^T L(\varphi;\dot\varphi)dt & (\varphi;\ 絶対連続) \\ \infty & (その他) \end{cases} \tag{3.3}$$
$$\left(S_T^{\varepsilon}(\varphi) = S_T(\varphi)/\varepsilon \right)$$

で定義する。$L(\varphi;\dot\varphi)$ が Onsager-Machlup 函数と呼ぶべきものである。拡散過程の場合 (3.3) は簡単にな，て

$$L(\varphi_t;\dot\varphi_t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}^{-1}(\varphi_t)(\dot\varphi_t^i - b^i(\varphi_t))(\dot\varphi_t^j - b^j(\varphi_t)). \tag{3.4}$$

K を compact 集合とし，

$$H_K(z) = \sup_{x\in K}\{H(x;z)\vee 0\},$$

H_K の Legendre 変換を L_K とおく。ひとつ記号を導入する。f；$R^d \to (-\infty,\infty]$ とするとき，有効定義域

$$\mathrm{dom}\, f \equiv \{x\in R^d;\ f(x)<\infty\}.$$

基本的な条件を $H(x;\cdot)$ に課そう。

条件 A：

A-1) $\mathrm{dom}\, H(x;\cdot) = R^d$ ，$\forall x\in R^d$

A-2) $H(x;z)$ は $C^2(R^d\times R^d)$ かつ z について狭義凸。

A-3) D を R^d のある凸集合とする時，

$$\mathrm{dom}\, L(x;\cdot) = \mathrm{dom}\, L_K = D \ , \quad {}^\forall x \in R^d \ , \ {}^\forall \text{compact 集合 } K .$$

A-4)

$$k = \sup_{\substack{|x-x'|<\delta \\ x, x' \in K \\ u \in D}} \frac{L_1(x';u) - L(x;u)}{1 + L(x;u)} \to 0 \quad \text{as } \delta \downarrow 0$$

A-5) $\{0\} \in \overset{\circ}{D}$

A-6) $\bar{D} \setminus D$ は閉集合

A-7) $\tilde{K}\,(\subset D)$, $K\,(\subset R^d)$ を compact 集合とする。このとき $L(x;u)$ は $K \times \tilde{K}$ 上で一様連続で

$$\sup_{x \in K} \sup_{\substack{u, u' \in \tilde{K} \\ |u-u'|<\delta}} |(\nabla_u L(x;u), u-u')| \to 0 \quad \text{as } \delta \downarrow 0$$

いろいろ条件がついてわずらわしいが，それは次のような事情による。$\mathrm{dom}\, H = R^d$ であっても $\mathrm{dom}\, L = R^d$ とは限らない。例えば一次元で

$$H(z) = e^z$$

$$L(u) = \begin{cases} u \ln u - u & (u \geq 0) \\ \infty & (u < 0) \end{cases} .$$

$\mathrm{dom}\, L$ の内部では $L(x;u)$ はなめらかさについて好ましい性質をもっているが，境界を含めると一般に悪くなる．$\mathrm{dom}\, L$ が閉集合なら A-6), A-7) は不要．特に $|\nabla_z H(x;z)| \to \infty$ as $|z| \to \infty$ なら $\mathrm{dom}\, L = R^d$ で A-3), A-5) ～ A-7) は不要．条件 A をゆるめたりもっと check しやすい形に書くことは可能だが省略する。

$S_T(\varphi)$ から誘導される量をいくつか定義する：

$$\Psi_T = \{\varphi\ ;\ \varphi_0 = x,\ \varphi_T = y\},$$

$$S(x,y) = \inf_{T \geq 0} \inf_{\varphi \in \Psi_T} S_T(\varphi) \tag{3.5}$$

$$S(x,\Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} S(x,y)$$

条件 A の下に $S(x,y)$, $S(x,\Gamma)$ は compact 集合上一様 Lipschitz 連続になる。又

$$S_T(\varphi) \geq 0, \quad = 0 \iff \dot{\varphi}_t = b(\varphi_t). \tag{3.6}$$

(3.5)を用いて「遠方には出ていきにくい」という条件を課すことにしよう。

条件 B ：N を原点中心半径N の球とするとき

$$S(0,\partial N) \to \infty \quad \text{as } N \uparrow R^d.$$

(注) 原点から出発したとき時刻 T までに球 N の外へとび出す確率は $\sim \exp(-S(0,\partial N)/\varepsilon)$ for $\varepsilon < \varepsilon_0(T)$. である。

§4 Ventsel-Freidlin の評価

§1 の b)′, c)′ に答えるための出発点は Ventsel と Freidlin によって得られた2つの評価式である [8],[9]。唯彼らは確率微分方程式(1.3)の係数の一様有界性を仮定しており，我々はそのかわりに条件 B を課しているので，彼らの証明に少々手を加える必要がある。(係数が一様有界だと不変測度を考える時に実際のモデルとかけ離れてまずいと思われる。)

定理2：条件L, A, Bが成立. このとき,

$\forall h>0,\ \forall \delta>0,\ \exists \varepsilon_0>0$

$$P_x(\rho_T(X^\varepsilon,\varphi)<\delta) \geq \exp\left(-\frac{S_T(\varphi)+h}{\varepsilon}\right) \qquad (第一評価式)$$

$$P_x(\rho_T(X^\varepsilon,\Phi_x)>\delta) \leq \exp\left(-\frac{S-h}{\varepsilon}\right) \qquad (第二評価式)$$

for $0<\forall\varepsilon<\varepsilon_0$

ここで

$$\Phi_x=\{\varphi;\ S_T(\varphi)\leq S,\ \varphi_0=x\},$$

$$\rho_T(f,g)=\sup_{0\leq t\leq T}|f_t-g_t|,$$

であり, ε_0はh, δ, Tに依存するが, xについてはcompact集合上一様にとれる。

§5 Onsager-Machlup汎函数$S_T(\varphi)$の特徴付け

定理2の形では第2評価式の直観的把握が少し困難だが, 殆んど同様に次のことが示せる.

定理3：条件L, A, B成立. $S_T(\varphi)<\infty$とする.

$\forall h>0,\ \exists \delta>0,\ \exists \varepsilon_0>0$

$$\exp\left(-\frac{S_T(\varphi)+h}{\varepsilon}\right)\leq P_x(\rho_T(X^\varepsilon,\varphi)<\delta)\leq \exp\left(-\frac{S_T(\varphi)-h}{\varepsilon}\right) \qquad (5.1)$$

$0<\forall\varepsilon<\varepsilon_0$

この定理は曲線φのまわりのあるtubeの中を動く確率が

$\sim \exp\left(-\frac{S_T(\varphi)}{\varepsilon}\right)$ （～は(5.1)の意味，普通の漸近展開より粗い）

であることを意味する。tubeの中を動く確率でOnsager-Machlup函数を決めようという立場[10]を認めれば，$S_T(\varphi)$をOnsager-Machlup汎函数と呼んで差支えないと思われる。

§6 $S_T(\varphi)$の対称性

少し寄道をして詳細釣合の成り立つ（対称Markov過程の）場合に$S_T(\varphi)$がある種の対称性をもつことを示そう。対称条件より

$$P_\varepsilon(t,x,y)\, g_\varepsilon(y) = P_\varepsilon(t,x,y)\, g_\varepsilon(x) \quad , \quad {}^{\exists} g_\varepsilon(x) \geq 0 . \quad (6.1)$$

$g_\varepsilon(x) \sim \exp\left(-\frac{U_\varepsilon(x)}{\varepsilon}\right)$ $(U_\varepsilon \sim O(1))$ の漸近形をもつとし，(1.6)のμ_xがdensity $w(x,\cdot)$をもつとする（$\mu_x(du) = w(x;u)du$）と，(6.1)は

条件 P

$$\begin{cases} 2\left(b(x) - \int u\, w(x;u)\,du\right) = -\sum_j a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} U(x) \\ w(x;u) = w(x;-u) \exp\left[-(u, \nabla U(x))\right] \qquad {}^{\exists} U(x), \end{cases}$$

となる。（$U_\varepsilon \to U$が適当になめらかに行くことを仮定している。）

定理4：条件L, A, B, P成立．$w(x;u)$はuについてcompact supportをもつとする．φ_tを絶対連続，$\dot{\varphi}_t \in D$ $(0 \leq t \leq T)$，$\varphi_0 = \varphi_T$なる閉じた曲線とする。$\hat{\varphi}_t = \varphi_{T-t}$とおく．このとき

$$S_T(\varphi) = S_T(\hat{\varphi})$$

定理3，4を組み合わせると，詳細釣合の成り立つ場合，曲線φにそって動く確率と逆向き$\hat{\varphi}$にそって動く確率は，εについての最低次の近似で一致することがいえる。これは拡散過程でのMotoo-Watanabeの結果の類似物といえる。[11]参照.

§7 $S(x,y)$から導びかれる同値類

同値関係～を

$$x \sim y \iff S(x,y)=S(y,x)=0$$

で定義する。同値な点を集めた最大同値類Kを次の様に定義する。

$$x \sim y \quad \text{if } x,y\in K \quad \& \quad x \not\sim y \quad \text{if } x\in K,\ y\notin K.$$

条件A,Bの下で最大同値類はcompactで連結がいえる. 点xのω-limit set $L^+(x)$に属する点は互いに同値だが$L^+(x)$は最大性を満たすとはいえない。力学系(1.2)に制限を加えよう。

条件C： ω-limit setの数は有限個.

各ω-limit setを含む最大同値類を$K_1,\cdots,K_\ell$とする(もし重複があればとり除いておく)。もし欲すれば$\{K_i\}$の中に一点だけからなる集合をさらに追加してもよい。

さて$x\in K_m$，$y\in K_n$に対して

$$S_{mn}=S(x,y)$$

を考える。これは代表点のとり方によらない。$K_1\sim K_\ell$に対応して数の集合$L=(1,2,\cdots,\ell)$を考える。Lの各点に矢印を他の点

に向けてつけて得られるグラフのうちイ) $L\setminus\{i\}$ からは一本ずつ矢印が出ており（$\{i\}$ からは矢印は出ていない），ロ) 矢印による閉 loop はないものを $\{i\}$-グラフと呼ぶことにし，その全体を G_i と書くことにする。

例 $l=3$ で

$$G_3 = \left\{ \begin{tikzcd}[sep=small] & 1 \arrow[dl] & \\ 2 \arrow[rr] & & 3 \end{tikzcd} ,\quad \begin{tikzcd}[sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \end{tikzcd} ,\quad \begin{tikzcd}[sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[rr] & & 3 \end{tikzcd} \right\}$$

点 m と n を結ぶ矢印に S_{mn} ($\Leftarrow$(7.1)) を対応させ，$g \in G_i$ に対して和 $\sum_{(m\to n)\in g} S_{mn}$，各 K_i に対して

$$S_i = \min_{g\in G_i} \sum_{(m\to n)\in g} S_{mn}$$

を対応させる。

例 $l=3$ で

$$S_3 = \min\,(S_{12}+S_{23},\ S_{21}+S_{13},\ S_{23}+S_{13}).$$

§8 不変測度 μ^ε の漸近的振舞

不変測度 μ^ε（$\mu^\varepsilon(A) = \int \mu^\varepsilon(dx)\, P(t,x,A)$）が存在するための条件を仮定しよう。G を空でない任意の開集合とする。τ_G を G の hitting time ($\inf\{t \geq 0,\ X_t^\varepsilon \in G\}$) とする。

D-1) X^ε は再帰的（$\tau_G < \infty$ P_x-a.s.）

D-2) f を $\bar{G}$ 上の有界 Borel 函数とするとき，$E_x[f(X^\varepsilon_{\tau_G})]$ は $x(\notin G)$ について連続.

L, A, B, D-1), D-2) からの有限な不変測度 μ^ε が乗数因子を除

いて一意的に存在する。これが規格化できる，即ち

D-3)　$\mu^{\varepsilon}(R^d)=1$

と仮定する。又技術的な仮定として，

E) (1.6) の μ_x は compact support をもつ：$^{\forall}$compact set K，$^{\exists}$compact set $\tilde{K}$，$\sup_{x\in K}\mu_x(\tilde{K}^c)=0$.

を仮定する。

定理5：条件 L, A～E 成立，さらに $^{\exists}r>0$

$$\sup_{x\in U_r(K)} E_x[\tau_K]<\infty \qquad (\varepsilon\text{について一様})$$

とする。

$$M=\{i\in L;\ S_i\text{の最小値を与える}\ i\}$$

$$F;\ \text{閉集合で}\quad F\cap\left(\bigcup_{i\in M}K_i\right)=\phi$$

このとき

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^{\varepsilon}(F)=0$$

ここで τ_K は K の hitting time，$K=\bigcup_{i\in L}K_i$，$U_r(K)$ は K の r 近傍.

エルゴード定理[13]

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X_t^{\varepsilon})\,dt=\int f(x)\,\mu^{\varepsilon}(dx)\qquad P_x\text{-a.s.}$$

が成り立つことを考えに入れると，「S_iの最小値を与える K_i におちつく」と云ってよい。

Corollary：定理5の条件に加えてポテンシャル条件Pが成り立つとする。このとき定理の結論で $S_i\to U_i$　($U_i=U(x),\ x\in K_i$)

としたものが成立。

証明は不変測度の構成定理[13]と§4 組みあわせて行う。大体[8]にならってやればよい。

§9 緩和の問題 I（緩和の方向）

最初K_iという最大同値類の近くにいたとして，次にどのK_m $(m \neq i)$へ移って行くか，その時間はどれくらいか調べよう。§9と§10でK_iは $S(x,y)>0$ $\forall x \in K_i$, $\forall y \notin K_i$ という意味で安定であるとし，$S_{im}(m \neq i)$の最小値を与えるmが一意的に定まるとしよう（それを$m=j$とする）。K_m自体は一点だけから成り立っていることもあるのでそれ自体の hitting time を考えるのは具合がわるい。そこで$\gamma>0$を適当に定めて各K_mのまわりに帯状の集合

$$\gamma_m = U_{\frac{\gamma}{2}}(K_m) \setminus \overline{U_{\frac{\gamma}{4}}(K_m)}$$

$$\Gamma_m = U_\gamma(K_m) \setminus \overline{U_{\frac{3}{4}\gamma}(K_m)} \qquad (U_\delta(K_m) \text{は} K_m \text{の} \delta \text{近傍})$$

を定める。stopping time の列 τ_n, σ_n を $(\gamma = \bigcup_{i \in L} \gamma_i,\ \Gamma = \bigcup_{i \in L} \Gamma_i)$

$$\tau_0 = 0$$

$$\sigma_n = \inf\{t > \tau_{n-1}\ ;\ X_t^\varepsilon \in \Gamma\}$$

$$\tau_n = \inf\{t > \sigma_n\ ;\ X_t^\varepsilon \in \gamma\}$$

とし γ上の Markov 連鎖 $y_n = X^\varepsilon_{\tau_n}$ をつくる。

直観的描像は次のようになる：最初γ_iにいればX_t^εは$\gamma_i \to \Gamma_i$

$\to \gamma_i \to \cdots$ のくり返しを殆んどいつも行っているだけだが，ごくまれに γ_i から $\gamma_m\ (m \neq i)$ への transition をおこす．このとき K_m に緩和したと考えてよかろう．もう少し正確に述べると次のようになる．$g_i(x, \gamma_m)\ (m \neq i,\ x \in \gamma_i)$ で Markov 連鎖 $y_n\ (y_0 = x)$ が $\gamma \setminus \gamma_i$ を初めて hit した時それが γ_m である確率を表わすことにする．この $g_i(x, \gamma_m)$ を K_m への緩和の確率と理解しようというわけである。

定理 6：条件 L, A〜C, E 成立．r を十分小さくとると

$$g_i(x, \gamma_j) \to 1 \qquad \text{as } \varepsilon \downarrow 0 \qquad (9.1)$$

つまり $\varepsilon \to 0$ でいくらでも 1 に近い確率で $S_{im} = \min$ を与える K_m に緩和する．(9-1) の収束の速さは $\exp\{-\frac{1}{\varepsilon}(S_{ij} - S_{im})\}\ (m \neq j)$ の order である。 $S_T(\varphi) \simeq S_{ij}$ なる φ は $K_m\ (m \neq i, j)$ にふれないので，$U_r(K_m)\ (m \neq i, j)$ がそのような curve φ にさわらない程度に r を小さくとればよい。

§10 緩和の問題 II （緩和時間）

$A_i = \{x \in R^d;\ L^+(x) \in K_i\}$ とおく。K_j は A_i の外側にあると仮定して（$K_j \cap A_i = \phi$）差支えない。A_i を出てしまえば条件 C より力学系だけで運動できるので，移動に要する時間は $O(1)$ である。したがって緩和時間としては A_i の脱出時間を考えたらよ

い。今のところ A_i 自体の脱出時間の漸近評価はうまく出来ていないので A_i から δ だけ削った領域 A_i^δ について行う：∂A_i の各点に法線をたて δ だけ内側にいった点によって囲まれる領域を A_i^δ とする。

条件F：$\overline{A_i}$ は compact であり C^2 boundary をもち，

F-1) $(b(x), \nu(x)) < 0$ on ∂A_i^δ for 十分小さい任意の $\delta > 0$.

F-2) $D = R^d$ で

$$\sup_{\substack{x \in N \\ u \in R^d}} \frac{L(x; \frac{u}{\lambda}) - L(x; u)}{1 + L(x; u)} \to 0 \qquad \text{as } \lambda \uparrow 1 .$$

ここで ν は ∂A_i^δ 上の外向き法線，N は半径 N 原点中心の球.

(注) $H(x; z)$ が $|z|^{1+\alpha}$ $(\alpha > 0)$ より早く ∞ にいけばよい（F-2).

定理7：L, A〜C, E, F が成立

τ_δ を A_i^δ の first exit time とする。

$\forall h > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists \varepsilon_0(h, \delta) > 0$

$$\exp\left(\frac{S_{ij} - h}{\varepsilon}\right) < E_x[\tau^\delta] < \exp\left(\frac{S_{ij} + h}{\varepsilon}\right) \qquad \begin{matrix} 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \\ x \in K_i \end{matrix}$$

つまり rough にいって緩和時間 $\sim \exp\left(\frac{S_{ij}}{\varepsilon}\right)$.

$\delta \to 0$ のとき $\varepsilon_0 > 0$ かどうかわからないので，A_i の脱出時間の評価は出きていない。

§11 物理的まとめ

1) Onsager-Machlup 函数 $L(\varphi;\dot{\varphi})$ は(3.1)~(3.3)で定義される。それを $[0,T]$ で積分した $S_T(\varphi)$ を Onsager-Machlup 汎函数と呼ぶことにする。その確率論的な意味は §5 定理3. で，これを根拠に $S_T(\varphi)$ に Onsager-Machlup の名を冠する。

2) 有限時間内の時間発展は

$$S_T(\varphi) = \min = 0$$

で特徴付けられる。

3) ω-limit set を $K_1, \cdots, K_\ell$（正確には最大同値類）とし各 K_i に対して S_i を §7 のやり方で対応させる。十分時間がたった時 $S_i = \min$ のところに落ち着く。特にポテンシャル条件 P が満たされると $U_i = \min$（U; ポテンシャル）のところにおちつく。S_i は U_i を一般化したものといえる。S_i が Onsager-Machlup 函数から誘導された量である点が重要で，Prigogine の熱力学の拡張になっている。

4) 最初 K_i にいたとき $S_{ij} = \min$ を与える K_j に緩和しその緩和時間は $\sim \exp\left(\frac{S_{ij}}{\varepsilon}\right)$.

5) 一般化された循環量（確率流の）

$$I = \int_0^T \{L(\varphi;\dot{\varphi}) - L(\varphi;-\dot{\varphi})\} dt$$

が定義され，詳細釣合 → $I = 0$. [12]の循環量が small deviation に対するものであるのに対し，ここのは large deviation に対する

ものである。

§12 文献

[1] R. Kubo, K. Matsuo & K. Kitahara, Fluctuation and Relaxation of Macrovariables J. Stat. Phys. 9 ('73) 51−96.

[2] P. Glansdorff & I. Prigogine, 構造安定性ゆらぎ (みすず 松本訳)

[3] 橋爪夏樹, 熱平衡から遠い状態の熱力学 科学 44 ('74) 458

[4] H. Tomita, A. Itō & H. Kidachi, Stochastic Decay Processes of Metastable State Prog. Theor. Phys.

I. Oppenheim, K. E. Shuler & G. H. Weiss, Stochastic Theory of Nonlinear Rate Processes with Multiple Stationary States, Physica 88A ('77) 191

G. Nicolis & J. W. Turner, Stochastic Analysis of a Non-equilibrium Phase Transition preprint.

[5] I. I. Gihman & A. V. Skorohod, Stochastic Differential Equations, Springer ('72)

[6] T. G. Kurtz, Solutions of Ordinary Differential Equations as Limits of Pure Jump Markov Processes, J. Appl. Prob. 7 ('70) 49

T. G. Kurtz, Limit Theorems for Sequences of Jump Markov Processes Approximating Ordinary Differential Processes, J. Appl. Prob. 8 ('71) 344.

[7] M. Suzuki, Statistical Mechanics of Non-equilibrium Systems II.

Prog. Theor. Phys 55 ('76) 383

[8] A.D. Ventsel & M.I. Freidlin, On Small Random Perturbations of Dynamical Systems, Russian Math. Surveys 25 ('70) 1

[9] A.D. Ventsel, Rough Limit Theorems on Large Deviations for Markov Stochastic Processes I, II. Theor. Prob. its Appl. 21 ('76) 227-242, 499-512.

[10] R.L. Stratonovich, On the Probability Functional of Diffusion Processes. Selected Transl. in Math. Stats. & Prob. 10 ('70) 273

S. Watanabe, 文献[11]

D. Dürr & A. Bach, The Onsager-Machlup Function as Lagrangian for the Most Probable Path of Diffusion Processes I, II. Comm. Math. Phys. 60 ('78) 153.

H. Ito, Probabilistic Construction of Lagrangian of Diffusion Processes, Prog. Theor. Phys. 59 ('78) 725

Y. Takahashi, 本研究会講演

[11] 渡辺信三, 拡散過程の対称性についての注意

[12] K. Tomita & H. Tomita, Irreversible Circulation of Fluctuation Prog. Theor. Phys 51 ('74) 1731

[13] G. Maruyama & H. Tanaka, Ergodic Properties of N-dimensional Recurrent Markov Processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 13 ('59), 52.